

إسلوب البوتستراب في لوحات السيطرة T^2 متعددة المتغيرات

أ.د. حمزة إسماعيل شاهين¹، م.م. فراس منذر جاسم²

^{1,2} الجامعة المستنصرية / كلية الإدارة والإقتصاد / قسم الإحصاء

drhamza409@gmail.com¹

kim.fino@yahoo.com²

الملخص :

تستعمل لوحات السيطرة (Control Charts) في مراقبة العمليات وتحديد السلوك غير الطبيعي (الشاذ) لها ، وأغلب لوحات السيطرة تعتمد في بنائها لحدود السيطرة (Control Limits) على إفتراض أن البيانات المشاهدة تتبع التوزيع الطبيعي . يعتبر إسلوب البوتستراب أحد التقنيات الالامعلمية الذي لا يتطلب أية إفتراضات تخص توزيع البيانات المشاهدة . في هذه الدراسة تم استخدام إسلوب البوتستراب في لوحات السيطرة T^2 Hotelling، وتحديد حدود سيطرة كفؤة في مراقبة العملية في حالة كون البيانات لاتتبع التوزيع الطبيعي أو لها توزيع غير معروف . تم استخدام المحاكاة في تقييم أداء لوحات السيطرة T^2 وفق إسلوب البوتستراب وإجراء مقارنة بين لوحات البوتستراب ولوحات السيطرة T^2 Hotelling التقليدية ، وقد أثبتت نتائج المحاكاة أن لوحات السيطرة T^2 وفق إسلوب البوتستراب كانت أفضل من لوحات السيطرة T^2 التقليدية .

پوخته :

تابلۆکانی کۆنترۆل کردن، لە چاودییریکردنی پرۆسەکان و دیاریکردنی رهفتاری لادهارانه و ناسروشتییاندا بەکاردین، زۆربەی تابلۆکانی کۆنترۆل کردنیش لە دروستکردنیاندا پشت بە سنورهکانی کۆنترۆل کردن دەبەسربیت، بە گریمانەی ئەوەی داتاکانی بینین شوین دابەشکردنی سروشتییانه دەکەون، شیوازی پوتاستراپ یەکیکە لەو تەکنیکە ناپارامیتییانە کە پیویستی بە هیچ گریمانەیە نییە سەبارەت بە دابەشبوونی داتاکانی بینین، لەم تویزىنەوەیەدا شیوازی پوتاستراپ لە تابلۆ کۆنترۆلی HOTELLING T2 (بەکارهاتووه، ھاوکات سنوریکی کۆنترۆل کردنی چالاک دیاری کراوه، لە چاودییریکردنی پرۆسەکەدا، ئەو کاتەی داتاکان شوین دابەشکردنی سروشتى ناکەون، يان دابەشکردنیکى سروشتى دیاریکراویان ھەمیە، تەرىپىكارىي (المحاکاه) بۇ ھەلسەنگاندىن ئەدای تابلۆ کۆنترۆللى T2 بەکارهاتووه، ئەویش بە پىشى شیوازی پوتاستراپ و بەراوردىكارىي لەنیوان تابلۆ پوتاستراپ و تابلۆ کۆنترۆللى (HOTELLING T2) ى كلاسيكى، دەرەنجامەكەش دەرى خستووه كە تابلۆ کۆنترۆللى T2 بە شیوازى پوتاستراپ لە تابلۆ كۆنترۆلە كە بە شیوازە كلاسيكىيە كە باشتە.

Abstract

Control charts have been used to monitor processes and detect abnormal behaviors. However, most control charts establish their control limits when the distribution of the observed data is normal . The bootstrap method is a nonparametric technique that does not rely on the assumption of a distribution of the observed data. In this study we have been used a bootstrap in multivariate T^2 control chart that can efficiently monitor a process when the distribution of the observed data is non-normal or unknown .

A simulation study was conduct to evaluate the performance of the proposed control chart and compare it with a traditional Hotelling's T^2 control chart . The results showed that the control chart using of the bootstrap performed better than the traditional T^2 control chart

1. المقدمة و هدف البحث :

تعتبر عملية السيطرة الاحصائية (Statistical Process Control) الاكثر استخداما في مراقبة النوعية وذلك باستعمال الاساليب والتقنيات الاحصائية لرصد و مراقبة خصائص النوعية للمواد المصنعة لضمان التزامها بمعايير معينة والحفاظ على العملية الانتاجية في حالة مستقرة، وهي كذلك وسيلة للكشف عن التغيرات غير الطبيعية والشاذة في العملية والتي تؤدي الى التدخل المبكر لتصحيحها. تعتبر لوحات السيطرة (Control Charts) واحدة من ادوات وسائل عملية السيطرة الاحصائية (SPC) والتي تعتمد على تقنية الرسم لمراقبة العملية احصائيا⁽⁵⁾.

الهدف الرئيسي للوحات السيطرة هو الكشف عن التغيرات (الانحرافات) الحاصلة في العملية و معالجة هذا الانحراف و اعادة انتظام العملية من جديد ولوحات السيطرة تقسم الى نوعين ، الاولى تسمى لوحات السيطرة احادية المتغير والتي تستند على رصد و مراقبة صفة واحدة من خصائص النوعية تحت افتراض استقلالية متغيرات العملية وهذا غير صحيح لانه في كثير من الحالات تكون معظم العمليات تتكون من عدة متغيرات مترابطة.

لذلك تطورت هذه اللوحات من رصد واحدة من خصائص النوعية الى رصد اثنين فأكثر من تلك الخصائص ونتيجة ذلك ظهر نوع ثانى من اللوحات يسمى لوحات السيطرة متعددة المتغيرات تستند معظم لوحات السيطرة متعددة المتغيرات على افتراض ان التوزيع الاساس للعملية هو التوزيع الطبيعي⁽⁷⁾ ، وهذا الافتراض بالواقع لا يتحقق في جميع الحالات ففي مثل هذه الظروف تكون لوحات السيطرة التي تلائمت على توزيع معين هيالمرغوب فيها ، لوحات السيطرة الامعلمية (Nonparametric Control Charts) تخدم هذا الغرض ولوحات السيطرة الامعلمية في السنوات الاخيرة تركزت على استخدام تقنيات و اساليب حديثة منها اسلوب البوتستراب⁽¹⁰⁾.

في هذه الدراسة تم التركيز بشكل رئيسي على لوحة السيطرة T^2 Hotelling لكونها الاكثر استخداما من بين لوحات السيطرة متعددة المتغيرات والتي تقوم على افتراض ان البيانات المشاهدة تتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات (Multivariate Normal Distribution) والتي حدود السيطرة لهذه اللوحة هي نسبيا تشكل نسبة مئوية من توزيع F ⁽⁹⁾.

هدف هذه الدراسة استخدام اسلوب البوتستراب كطريقة لتحديد حدود السيطرة للوحة السيطرة T^2 في حالة المشاهدات لاتتبع التوزيع الطبيعي ، وكذلك استعمال مقياس متوسط طول المدى للمقارنة بين أداء لوحات السيطرة باستخدام المحاكاة .

2. لوحة السيطرة Hotelling T^2 التقليدية :

لوحة السيطرة T^2 Hotelling⁽⁸⁾ هي الاكثر استخداما من بين لوحات السيطرة متعددة المتغيرات للمشاهدات المفردة تتحت افتراض لدينا مجموعة بيانات بحجم (n) من المشاهدات ، و لكل مشاهدة (j=1,...,n) تم اخذ (p) من المتغيرات التي يتعين رصدها ، وبافتراض ان مجموعة البيانات تتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات بمتوجه متوسطات μ و مصفوفة التباين Σ المشتركة غير المعلومتين احصاءات Hotelling T^2 يمكن حسابها لكل مشاهدة لمجموعة البيانات وفق المعادلة الآتية⁽⁹⁾.

$$T_{(j)}^2 = (x_j - \bar{x})^T S^{-1} (x_j - \bar{x}) \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

اذ ان:

تمثل مصفوفة التباين و التباين المشتركة للعينة S :

و اللذان يتم حسابهما حسب الصيغ الآتية:-

و حيث ان من مميزات احصائيات F^2 امكانية تحويلها الى توزيع F (F-distribution) بدرجتي حرية p ، np تحت افتراض التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وباستخدام التحويل الاتي :

$$\frac{(n-p)}{p(n-1)} T^2 \sim F(p, n-p)$$

وعليه فان حدود السيطرة للوحة² التقليدية تحت حالة المشاهدات المفردة (Individual Observation) يمكن تحديدها وفق الصيغة الآتية⁽¹¹⁾:

حيث أن $F(\alpha, p, n)$ تمثل النسبة المئوية $1 - \alpha$ من توزيع F بمستوى معنوية α ، اذ ان α تمثل معدل الخطأ من النوع الاول (Type I error) وتسمى في مجال السيطرة النوعية بمعدل الانذار الكاذب $\text{alarm}^{(10)}$ (False) والتي تحدد قيمتها من قبل الباحث، ومعدل الخطأ من النوع الاول يتم تقديره بنسبة عدد المشاهدات ضمن السيطرة التي عرفت بصورة غير صحيحة انها خارج السيطرة الى العدد الكلي للمشاهدات ضمن السيطرة وحدود السيطرة (Control Limits) التي يتم تحديدها وفق الصيغة (4) يستعمل لمراقبة العملية ، فيقال أن المشاهدات خارج حدود السيطرة في حالة قيم T^2 المحسوبة وفق الصيغة (1) المناظرة للمشاهدة تتجاوز حدود السيطرة .

3. اسلوب البوتراب النسبي :

أسلوب البوتستراب يعتبر من الطرائق اللامعليمية الذي لا يفترض توفر شروط مسبقة حول توزيع البيانات وهو من أكثر الطرائق استعمالاً لأسلوب اعادة المعاینة (resampling) في تحديد التقرير الاحصائي في حالة توزيع المجتمع غير المعلوم.

يُطبق أسلوب الـ *بوتوسترايب* في حساب حدود السيطرة ويمكن ايجازه في النقاط الآتية:

1) حساب احصاءات T^2 لجميع مشاهدات العينة التي حجمها (n) ولبيانات الواقعه ضمن السيطرة باستخدام الصيغة (1).

2) سحب عينات عشوائية مع الارجاع (عينات البوتستراب) عددها B ، اذ ($1000 > B$) مشاهدات هذه العينات قيم احصاءات T^2 المحسوبة حسب الصيغة (1) وبالشكل :

, (i=1,2,.....,B)) $T_1^{2(i)}$, $T_2^{2(i)}$ $T_n^{2(i)}$ (

(3) لكل عينة من عينات البوتراب التي عددها B يتم تحديد قيمة بنسبة مؤوية α^{th} وحسب قيمة محددة لـ α تقع ضمن المجال ما بين الصفر والواحد.

(4) تحديد حد السيطرة على أساس المتوسط العام لجميع القيم المحسوبة بنسبة مؤوية α^{th} لعينات البوتراب و حسب الصيغة الآتية:

$$CL_B = \bar{T}_{100(1-\alpha)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\beta} T_{100(1-\alpha)}^{2(i)} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

(5) باستخدام حد السيطرة CL_B في عملية مراقبة المشاهدات فعندما تكون قيمة احصاء T^2 لتلك المشاهدات تتجاوز حد السيطرة $\bar{T}_{100(1-\alpha)}$ هذا يدل ان المشاهدة خارج السيطرة (OUT OF CONTROL)

والشكل الآتي يبين المخطط لأسلوب البوتراب في حساب حدود السيطرة :

$$T_1^2, T_2^2, \dots, T_n^2 \rightarrow \begin{bmatrix} T_1^{2(1)}, T_2^{2(1)}, \dots, T_n^{2(1)} \\ T_1^{2(2)}, T_2^{2(2)}, \dots, T_n^{2(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_1^{2(B)}, T_2^{2(B)}, \dots, T_n^{2(B)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T_{100(1-\alpha)}^{2(1)} \\ T_{100(1-\alpha)}^{2(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{100(1-\alpha)}^{2(\beta)} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\beta} T_{100(1-\alpha)}^{2(i)}$$

وبالرغم من أن اسلوب البوتراب لا يحتاج الى اي عمليات احصائية لتحديد المعلمات ولكنه من جانب اخر ان عدد العينات البوترابية المستخدمة ربما يؤثر في تحديد حدود السيطرة حيث وجد ان التغيرات تزداد في حدود السيطرة البوترابية عندما تكون اعداد العينات العشوائية المحسوبة اقل من (1000) و لكنها تستقر في حالة اعداد العينات تتجاوز (1000).

4. قياس أداء لوحات السيطرة :

للمقارنة بين أداء لوحات السيطرة يستعمل مقياس يسمى متوسط طول المدى و يرمز له (ARL) و يعرف بأنه متوسط عدد المشاهدات التي يجب تحديدها قبل اشارة الخروج عن السيطرة ويسحب بالصيغة الآتية⁽¹¹⁾:

$$ARL = \frac{1}{\alpha} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

في هذه الدراسة تم استعمال مقياس متوسط طول المدى ضمن السيطرة (ARL₀) للمقارنة بين أداء لوحات السيطرة حيث كلما كانت قيمة (ARL₀) الحقيقة التي يتم الحصول عليها من لوحات السيطرة مشابه او قريبة من القيمة الافتراضية (ARL₀) دل ذلك على افضلية لوحات السيطرة^{(4), (10)}.

5. المحاكاة :

تم توظيف اسلوب المحاكاة في هذا البحث لتوليد تجربة بياناتها تتبع ثلاثة توزيعات ، حيث تم توليد (1000) مشاهدة لتوزيعات ثلاثة : التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات (N)، التوزيع (ال الطبيعي – الملتوي) متعدد التغيرات (SN)، والتوزيع (اللوجارتمي – الطبيعي) متعدد المتغيرات (log N) وقد كررت التجربة (5000) مرة وتم سحب عينة عشوائية مع الارجاع (عينات البوتستراب) ، وكل مجموعة بيانات تم استخدام ثلاثة متغيرات تمثل خصائص النوعية للعملية ، وتم استخدام (0 0 0) = \bar{m} كموجه متوسط (Mean Vector) لتوليد التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات ، والتوزيع (ال الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات ، اما لتوليد التوزيع (اللوجارتمي – الطبيعي) فقد استخدم موجه المتوسط (1 1 1) = \bar{m} اضافة الى ذلك تم استخدام مصفوفة التباين والتباين المشترك (Var –Cov matrix) للتوزيعات الثلاث وهي :

$$\sum = \begin{pmatrix} 1.000 & 600 & 50 \\ 0.601 & 000 & 15 \\ 0.500 & 151 & 00 \end{pmatrix}$$

وبالنسبة للتوزيع (ال الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات تم افتراض قيم مختلفة لدرجات التلوث في البيانات وهي ($\lambda = 0,1,2,3$) للاحظة تأثيرات هذه القيم على اداء لوحات السيطرة ، وقد تم استعمال برنامج R الجاهز في توليد البيانات للتوزيعات الثلاثة .

6- مقارنة اداء اللوحات وفق (ARL₀) :

الجدوال (1) الى (5) تظهر قيم متوسط طول المدى (ARL₀) الافتراضية والحقيقة لحدود السيطرة باستخدام توزيع F واسلوب البوتستراب النسبي.

ويلاحظ من خلال الجدول رقم (1) ان القيم الحقيقة لمتوسط طول المدى (ARL₀) قريبة جداً من القيم الافتراضية لـ (ARL₀) عندما تكون درجة التلوث صفر ($\lambda=0$) لحدود السيطرة باستخدام توزيع F واسلوب البوتستراب في حالة التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات.

بينما يلاحظ من خلال الجداول (2) ، (3) ، (4) انه عند زيادة درجة التلوث ($\lambda=1,2,3$) يحصل هناك فرق بين القيم الافتراضية والحقيقة لمتوسط طول المدى (ARL₀) لتوزيع F في حالة التوزيع (ال الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات ، على العكس من ذلك نجد ان القيم الحقيقة والافتراضية لمتوسط طول المدى (ARL₀) تكون متشابه او قريبة عن بعضها لحدود السيطرة باستخدام اسلوب البوتستراب النسبي .

اما حالة التوزيع (اللوجارتمي- الطبيعي) متعدد المتغيرات يلاحظ في الجدول رقم (5) ان القيم الحقيقة لمتوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام اسلوب البوتستراب قريبة جداً من القيم الافتراضية لـ (ARL₀).

كذلك يلاحظ ان قيم متوسط الخطأ المعياري الموضوعة بين قوسين في الجداول المذكورة صغيرة وهذا يعطي انطباع صحة النتائج التي تم التوصل اليها

جدول رقم (1)

متوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام توزيع F

واسلوب البوتراب النسبي للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات

CASE	α	Desired (ARL ₀)	F-dist	Bootstrap
N	0.01	100.00 0.99540 (1.0143)	98.25100.05	
	0.02	50.00 (0.6987)	42.1	49.57 (0.6541)
	0.03	33.33	34.55 (0.4012)	31.72 (0.5143)
	0.04	25.00 (0.3323)	25.07 (0.4015)	24.36
	0.05	20.00 (0.2221)	20.18 (0.3532)	18.99
	0.06	16.67 (0.1816)	17.01 (0.2443)	16.11
	0.07	14.29 (0.1351)	14.51 (0.1665)	14.33
	0.08	12.5 (0.1079)	13.2 (0.1118)	12.74
	0.09	11.11 (0.8223)	11.57 (0.9559)	10.95
	0.10	10.00 (0.7978)	10.34 (0.8572)	10.18

جدول رقم (2)
 متوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام توزيع F
 وأسلوب البوتستراب النسبي للتوزيع (الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات عندما $\lambda = 1$

CASE	α	Desired (ARL ₀)	F-dist	Bootstarp
SN($\lambda = 1$)	0.01	100.00	99.5490.32	
	50.00	42.87	47.12(0.9594)	(1.2422)
				0.02
		(0.8147)	(0.9523)	
	0.03	33.33	32.02	34.35
		(0.6220)	(0.8736)	
	0.04	25.00	22.89	24.09
		(0.4438)(0.6692)		
	0.05	20.00	21.15	20.95
		(0.3960)	(0.4545)	
	0.06	16.67	16.56	16.22
		(0.1944)	(0.3011)	
	0.07	14.29	14.12	14.31
		(0.1496)	(0.2123)	
	0.08	12.5	12.77	11.93
		(0.1220)	(0.1553)	
	0.09	11.11	11.51	11.03
		(0.0954)	(0.1088)	
	0.10	10.00	9.85	9.96
		(0.0883)	(0.0997)	

جدول رقم (3)
 متوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام توزيع F
 واسلوب البوستراب النسبي للتوزيع (الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات عندما $\lambda = 2$

CASE	α	Desired (ARL ₀)	F-dist	Bootstarp
SN($\lambda = 2$)	0.01	100.00 (0.8287)	97.5584.35 (0.9940)	
	0.02	50.00 (0.7073)	40.90 (0.9011)	49.36
	0.03	33.33 (0.6661)	30.51 (0.7543)	33.25
	0.04	25.00 (0.5158)	24.03 (0.6790)	25.22
	0.05	20.00 (0.4337)	20.97 (0.5550)	19.9
	0.06	16.67 (0.3332)	15.84 (0.4664)	16.07
	0.07	14.29 (0.2007)	13.42 (0.3818)	13.93
	0.08	12.5 (0.1513)	12.08 (0.2642)	12.63
	0.09	11.11 (0.1074)	11.77 (0.1439)	11.09
	0.10	10.00 (0.0905)	9.75 (0.1027)	9.61

جدول رقم (4)

متوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام توزيع Fواسلوب البوتراب النسبي للتوزيع (الطبيعي – الملتوي) متعدد المتغيرات عندما $\lambda = 3$

CASE	α	Desired (ARL ₀)	F-dist	Bootstrap
SN($\lambda = 3$)	0.01	100.00 (0.7522)	100.3277.31 (0.956)	
	0.02	50.00 (0.6068)	37.44 (0.7412)	51.61
	0.03	33.33 (0.5594)	28.08 (0.6326)	33.72
	0.04	25.00 (0.4022)	21.43 (0.5239)	24.39
	0.05	20.00 (0.3871)	19.18 (0.4725)	20.1
	0.06	16.67 (0.2458)	16.03 (0.3057)	16.57
	0.07	14.29 (0.1162)	14.47 (0.2440)	14.16
	0.08	12.5 (0.09344)	12.42 (0.1747)	12.06
	0.09	11.11 (0.0826)	11.21 (0.0993)	11.48
	0.10	10.00 (0.0757)	10.10 (0.0880)	9.93

جدول رقم (5)
 متوسط طول المدى (ARL₀) لحدود السيطرة باستخدام توزيع F
 واسلوب البوتستراب النسبي للتوزيع (اللوغاريتمي - الطبيعي) متعدد المتغيرات

CASE	α	Desired ARL ₀	F-dist	Bootstrap
Log N	0.01	100.00 (0.5541)	103.3650.88 (0.7204)	
	0.02	50.00 (0.4110)	26.17 (0.6452)	50.42
	0.03	33.33 (0.3330)	18.79 (0.5012)	32.96
	0.04	25.00 (0.2658)	16.07 (0.4430)	24.11
	0.05	20.00 (0.1789)	15.93 (0.3665)	21.04
	0.06	16.67 (0.0947)	14.02 (0.2420)	16.22
	0.07	14.29 (0.0858)	13.19 (0.1571)	14.55
	0.08	12.5 (0.0744)	12.41 (0.0939)	11.98
	0.09	11.11 (0.0660)	11.76 (0.0829)	11.05
	0.10	10.00 (0.0539)	10.83 (0.0689)	9.97

7- الاستنتاجات و التوصيات:

من خلال استخدام أسلوب البوتراب في تحديد حدود السيطرة للوحة T^2 تحت حالة ان البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي يلاحظ ان اسلوب البوتراب يعتبر طريقة حرة و مبسطة ولا تحتاج الى قواعد أساسية قوية في موضوع الاستدلال الاحصائي ومن خلال تطبيق المحاكاة أثبتت ان لوحة السيطرة باستخدام أسلوب البوتراب ذات أداء يفوق لوحة السيطرة T^2 التقليدية في حالة التوزيع (ال الطبيعي _ الملتوي) متعدد المتغيرات وفق مقياس متوسط طول المدى ، وفي حالة البيانات تتبع التوزيع الطبيعي يلاحظ أن أداء لوحة السيطرة باستخدام أسلوب البوتراب يكاد يكون نفس أداء لوحة السيطرة T^2 التقليدية وهذا يعطي مؤشر على أن لوحات السيطرة باسلوب البوتراب تكون كفؤة في حالة التوزيع الطبيعي وغير الطبيعي .

نوصي بامكانية التوسيع في استخدام التقنيات والاساليب الامثلية في لوحات السيطرة متعددة المتغيرات منها اختبار الاشارة و اختبار الرتبة - الاشارة و غيرها من الاساليب الامثلية الأخرى.

8- المصادر :

1- شاهين، حمزة اسماعيل و صالح، عائدة هادي(2013) . "استخدام مقدرات حصينة للوحة السيطرة Hotelling T^2 للمشاهدات المفتردة" ، مجلة الادارة و الاقتصاد - الجامعة المستنصرية العدد 11 المجلد .8

2- شاهين ، حمزة اسماعيل و عبد المنعم ، رسول هادي (2016) "المقدر الالبي في تصميم لوحة السيطرة Hotelling T^2 للمشاهدات المنفردة" ، رسالة ماجستير/كلية الادارة و الاقتصاد - الجامعة المستنصرية.

3-Alvin,R.C.(2002) , "Method of Multivariate Analysis" . second edition

، john Wiley and sons

4-Bajgier , S.M.(1992) , "the use of bootstrapping to construct limits on control charts" , Proceeding of the decision science institute ,San diego .page 1611-1613

5-Berimis ,S.Psarakis,S.andPanaretos,J.(2006) , "Multivariate statistical process control charts:an overview." , Quality and Reliability Engineering International ,23(5).517-543.

6-Chakraborti ,S.,RanDer Laan,P.andBakir ,S.T.(2001), "Non Parameteric control chart ;an overview and some results" , Journal of quality technology 33(3),304-315.

7-Chenouri ,S.E.variyath,A,M.andSteien. S.H.(2007) , "Multivariate control chart for individual observation " , <http://wiskuleuren.b/stat/papers/rismcapdf>.

8-Hotelling ,H.(1947) , "Multivariate Quality control IN Techniques of statistical Analysis" , MC grawhill , new yourk , pp 111-184

9- Montgomery , D.C.(2005) , " Introduction to statistical Quality control " , Fifth edition , wiley , new york .

10-Poorich PhalaDiganon ,Seoun and Sum-KyoungPark , "Bootstrap – based T^2 multivariate control chart "

11- Sullivan , J.H. , and Woodall , W. H. (1996) " A Comparison of multivariate control charts for individual observation " , Journal of Quality Technology , Vol 28 , No 4 , p398-408 .

www.uta.edu/cosmos/tech Reports/cosmos-10-1